ÜBER DIE ANZAHL DER ZERLEGUNGEN EINER GANZEN ZAHL IN SUMMANDEN.

INAUGURALDISSERTATION

ZUR ERLANGUNG

DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE,

WELCHE MIT

GENEHMIGUNG DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITAT

HALLE-WITTENBERG

AM **FREITAG**, DEN **28. JULI 1899**

MITTAGS 12 UHR

ZUGLEICH MIT DEN ANGEHÄNGTEN THESEN

ÖFFENTLICH VERTEIDIGEN WIRD

HANS WOLFF

AUS MAGDEBURG.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

OPPONENTEN:

HERR STUD. MATH. **FRITZ HENNING.**

HERR STUD. MATH. **MARTIN HEYSE.**

HALLE A. S.

HOFBUCHDRUCKEREI VON C. A. KAEMMERER & CO.

1899.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0183

SEINER LIEBEN MUTTER!

Über die Anzahl $F_\mu(n)$ der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in μ positive ganze Summanden mit vorgeschriebener Grössenfolge und die Eigenschaften dieser Anzahlfunktion hat Euler[1]) in der Abhandlung „de partitione numerorum" grundlegende Untersuchungen angestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird $F_\mu(n)$ dargestellt als eine Summe von Produkten der Potenzen von n mit Divisionsresten von n und im zweiten Teil vermittelst Bernoullischer[2]) Funktionen die Zurückführung der Koëffizienten von $F_\mu(n)$ auf lineare Funktionen der Koëffizienten von $F_{\mu-1}(n)$ gezeigt. Schliesslich wird eine independente Darstellung von $F_6(n)$ gegeben.

I.

§ 1. $\overline{F}_\mu(n)$ sei die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in μ ganzzahlige Summanden; $x_0, x_1 \ldots x_{\mu-1}$ sei eine solche Zerlegung.

Dann ist:

$$x_0 + x_1 + \ldots x_{\mu-1} = \Sigma x = n \qquad (l = 0,1, \ldots \mu-1) \qquad 1.)$$

$$x_l \geqq 0 \qquad 2.)$$

Betrachtet man die x_l als Punktkoordinaten, so wird durch sie eine ebene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_\mu$ bestimmt und der Punkt $(x_0, x_1 \ldots x_{\mu-1})$ liegt infolge 1.) in der $\mathfrak{M}_{\mu-1} : \Sigma x_l = n$ ferner infolge 2.) auf der positiven Seite jeder $\mathfrak{M}_{\mu-2}$ mit den Gleichungen $\Sigma x = n$; $x_l = 0$ oder in einer solchen $\mathfrak{M}_{\mu-2}$ selbst.

Diese μ verschiedenen $\mathfrak{M}_{\mu-2}$ begrenzen in der $\mathfrak{M}_{\mu-1}$ ein Prismatoid, welches alle fraglichen Punkte $(x_0, x_1 \ldots x_{\mu-1})$ enthält. Ihre Anzahl ist $\overline{F}_\mu(n)$.

Setzt man $x_0 = 0$; so ist $x_1 + x_2 + \ldots x_{\mu-1} = n$

Die Anzahl derartiger Zerlegungen ist: $\overline{F}_{\mu-1}(n)$.

Setzt man nacheinander $x_0 = 0,\ 1,\ 2 \ldots n$; so erhält man als entsprechende Anzahlen der Zerlegungen:

$$\overline{F}_{\mu-1}(n);\quad \overline{F}_{\mu-1}(n-1);\quad \ldots\quad \overline{F}_{\mu-1}(0).$$

Im ganzen erhält man die Anzahl der Zerlegungen in μ Summanden, da man ja jeden möglichen Wert von x_0 berücksichtigt hat.

Also ist: $\overline{F}_\mu(n) = \overline{F}_{\mu-1}(n) + \overline{F}_{\mu-1}(n-1) + \ldots \overline{F}_{\mu-1}(0)$

Für $\mu = 1$ haben wir: $\overline{F}_1(n) = 1$.

Für $\mu = 2$: $\overline{F}_2(n) = \overline{F}_1(n) + \overline{F}_1(n-1) + \ldots \overline{F}_1(0) = n+1$

Für $\mu = 3$: $\overline{F}_3(n) = (n+1) + n + \ldots 1 = \binom{n+2}{2}$

Für $\mu = \mu$ nach einem bekannten Satz über Binomialkoëffizienten: $\overline{F}_\mu(n) = \binom{n+\mu-1}{\mu-1}$, 3.)

wie auch Herr J. Hermes[3]) auf einem anderen Wege gefunden hat.

---

1) Introductio in analysin infinitorum.

2) Eine Andeutung dieses Zusammenhanges giebt J. Hermes, Math. Ann. XLVII 297.

3) Math. Ann. XLV.

§ 2. Wir nehmen nun zu 1.) und 2.) noch die Bedingungen hinzu:

$$x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \ldots \leqq x_{\mu-1} \qquad 4.)$$

und suchen die Anzahl $F_\mu(n)$ der möglichen Zerlegungen. Die entsprechenden Punkte liegen in der $\mathfrak{M}_{\mu-1}$: $\Sigma x_l = n$ in einem Prismatoid $\mathfrak{P}_0$ mit den μ begrenzenden $(\mu-2)$fachen Mannigfaltigkeiten $x_0 = 0$; $x_0 = x_1$; $x_1 = x_2$; $\ldots x_{\mu-2} = x_{\mu-1}$. Denn um von einem Punkt, für den $x_0 < x_1$; zu einem andern zu gelangen, für den $x_1 < x_0$; muss man die Mannigfaltigkeit $x_0 = x_1$ überschreiten, u. s. w.

Das Prismatoid $\mathfrak{P}_0$ liegt ganz innerhalb des Prismatoids $\mathfrak{P}$ mit den Grenzen $x_i = 0$. Hätten wir anstatt der Bedingungen 4.) die Bedingungen:

$$x_{i_0} \leqq x_{i_1} \leqq x_{i_2} \ldots \leqq x_{i_{\mu-1}};$$

so erhielten wir das Prismatoid $\mathfrak{P}_i$ mit den Grenzen:

$$x_{i_0} = 0;\ x_{i_0} = x_{i_1};\ x_{i_1} = x_{i_2};\ \ldots\ x_{i_{\mu-2}} = x_{i_{\mu-1}}.$$

Im ganzen erhält man $\mu!$ solcher kongruenten Prismatoide, da $i_0; i_1 \ldots i_{\mu-1}$ eine Umstellung von $0, 1 \ldots \mu-1$ ist. Diese Prismatoide haben mit einander Punkte gemein, welche symmetrisch gelegenen Mannigfaltigkeiten angehören. So hat z. B. das Prismatoid $\mathfrak{P}_0$ mit einem Prismatoid, für welches $x_1 \leqq x_0 \leqq x_3 \leqq x_2 \leqq x_4 \ldots$ Punkte gemein, die sämmtlich auf der Mannigfaltigkeit $x_0 = x_1$; $x_2 = x_3$ liegen. Im allgemeinen sind die Gleichungen einer Symmetriemannigfaltigkeit:

$$x_{i_0} = x_{i_1} = \ldots x_{i_\alpha};\ x_{i_{\alpha+1}} = x_{i_{\alpha+2}} = \ldots x_{i_{\alpha+1+\beta}};\ x_{i_{\alpha+\beta+2}} = \ldots = x_{i_{\alpha+\beta+2+\gamma}};\ \ldots$$

$$(\alpha+1) + (\beta+1) + (\gamma+1) + \ldots = \mu. \qquad 5.)$$

Man kann festsetzen, dass i_α; $i_{\alpha+\beta+1}$; $i_{\alpha+\beta+\gamma+2}$ die niedrigsten Indices ihrer Gleichungsgruppen sind und dass: $i_\alpha < i_{\alpha+1+\beta} < i_{\alpha+\beta+2+\gamma} \ldots$ ist. Auf diese Weise ist i_α der kleinste Index überhaupt, also $x_{i_\alpha} = x_0$; Die Punkte der Symmetriemannigfaltigkeit, welche innerhalb des Prismatoids $\mathfrak{P}$ liegen, bilden das Prismatoid $\mathfrak{S}_k$. Das Prismatoid $\mathfrak{P}_i$ hat mit $\mathfrak{S}_k$ Punkte gemein, welche ausserdem allen Prismatoiden angehören, die wir durch Permutation der Indices einer Gleichungsgruppe in 5.) erhalten. Die betrachteten Punkte von $\mathfrak{S}_k$ kommen also in $(\alpha+1)!\ (\beta+1)!\ (\gamma+1)! \ldots$ Prismatoiden $\mathfrak{P}_i$ vor. Hätten wir eine andere Reihenfolge der Gleichungsgruppen in 5.) gewählt, so wären wir auf andere in $\mathfrak{S}_k$ zusammenstossende $(\alpha+1)!\ (\beta+1)!\ (\gamma+1)! \ldots$ von den vorigen verschiedene Prismatoide und demgemäss auf neue gemeinsame Punkte gekommen. Es kommen also alle Punkte von $\mathfrak{S}_k$, für welche keine anderen Gleichungen als 5.) gelten, in

$$(\alpha+1)!\ (\beta+1)!\ (\gamma+1)! \ldots$$

Prismatoiden vor. Wenn n durch μ ohne Rest teilbar ist, so kommt z. B. der Mittelpunkt von $\mathfrak{P}$: $(x_0 = x_1 = \ldots x_{\mu-1})$ in allen $\mu!$ Teil-Prismatoiden $\mathfrak{P}_i$ vor. Wir wollen nun die Punktzahl $F(\mathfrak{P}_0)$ des Prismatoids $\mathfrak{P}_0$ in Beziehung setzen zu der bekannten Punktzahl $F(\mathfrak{P}) = F_\mu(n)$ von $\mathfrak{P}$. Um $\mu!\ F(\mathfrak{P}_0) = \Sigma F(\mathfrak{P}_i)$ zu erhalten, müssen wir in $\mathfrak{P}$ jeden Punkt X_k eines Prismatoids $\mathfrak{S}_k$ unter dessen Koordinaten keine anderen Übereinstimmungen als die in 5.) angegebenen vorkommen. $(\alpha+1)!\ (\beta+1)!\ (\gamma+1)! \ldots$ mal zählen. Jedem $\mathfrak{P}_i$ lässt sich ein Gleichungssystem 5.) und also auch ein Prismatoid $\mathfrak{S}_k$ eindeutig zuordnen. In jedem Gleichungssystem 5.) sind nur die Plätze von x_{i_α}; $x_{i_{\alpha+1+\beta}}$; $x_{i_{\alpha+\beta+2+\gamma}}$ ... vorgeschrieben, die übrigen Indices einer jeden Gleichungsgruppe können unter sich beliebig umgestellt werden. Es giebt daher immer $\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots$ verschiedene Prismatoide $\mathfrak{P}_i$, denen dasselbe $\mathfrak{S}_k$ entspricht. Der Punkt X_k in $\mathfrak{S}_k$ kommt ausserdem in jeder Symmetriemannigfaltigkeit vor, für welche nur ein Teil der Gleichungen 5.) gilt.

Haben wir aus der ersten Gleichungsgruppe in 5.) f Gruppen von ξ gleichen Koordinaten $x^{(\xi)}$, g Gruppen von η gleichen Koordinaten $x^{(\eta)}$ u. s. w., so ist:

$$f\xi + g\eta + \ldots = \alpha + 1.$$

Einige der Grössen $\xi, \eta \ldots$ können auch $= 1$ werden; dann ist die betreffende Koordinate $x^{(\xi)}$ nur sich selbst gleich. Es lassen sich durch Umstellung der Gleichungsgruppen mit gleicher Koordinatenanzahl und Umstellung der gleichen Koordinaten: $f!\ (\xi!)^f\ g!\ (\eta!)^g \ldots$ Darstellungen für dasselbe System ableiten. Macht man dieselben Umstellungen für jedes System, so erhält man alle

überhaupt möglichen Umstellungen der $(\alpha+1)$ Koordinaten; folglich giebt es $\frac{(\alpha+1)!}{f!\,(\xi!)^f\,g!\,(\eta!)^g\ldots}$ verschiedene Gleichungssysteme, welche f Gruppen von ξ gleichen Koordinaten, g Gruppen von η gleichen Koordinaten u. s. w. besitzen. Summiert man in Hinsicht auf alle möglichen Zerlegungen von $(\alpha+1)$, so bekommt man die Zahl aller Gleichungssysteme, welche sich aus der ersten Gleichungsgruppe von 5.) bilden lassen:

$$\sum \frac{(\alpha+1)!}{f!\,(\xi!)^f\,g!\,(\eta!)^g\ldots}.$$

Denken wir uns für jedes $\mathfrak{P}_i$ ein Prismatoid $\mathfrak{S}_i$, in dessen Gleichungssystem die Koordinaten gerade in der innerhalb $\mathfrak{P}_i$ geltenden Reihenfolge stehen, hingeschrieben, so kommt jedes aus der ersten Gleichungsgruppe von 5.) allein abgeleitete Gleichungssystem $((\xi-1)!)^f\,((\eta-1)!)^g\ldots$ mal vor; also kommt X_k in den hingeschriebenen zugehörigen Symmetriemannigfaltigkeiten

$$\sum \frac{(\alpha+1)!}{f!\,\xi^f\,g!\,\eta^g\ldots} = (\alpha+1)!\ ^{1})$$

mal vor und in allen $\mathfrak{S}_i$ oder in all den $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ldots$ mal hingeschriebenen, verschiedenen Gleichungssystemen entsprechenden $\mathfrak{S}_k$

$$(\alpha+1)!\ (\beta+1)!\ (\gamma+1)!\ldots \text{ mal.}$$

Um also $X_k : (\alpha+1)!\ (\beta+1)!\ (\gamma+1)!\ldots$ mal zu zählen und somit die Punktzahl $\mu!\ F(\mathfrak{P}_0) = \Sigma\, F(\mathfrak{P}_i)$ zu erhalten, müssen wir die $\mathfrak{S}_i$ je einmal oder die verschiedenen Gleichungssystemen entsprechenden $\mathfrak{S}_k$ je $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ldots$ mal auszählen. Es ist also:

$$\Sigma\, F(\mathfrak{P}_i) = \Sigma F(\mathfrak{S}_i) \qquad (i=0,1\ldots(\mu!-1)) \qquad 6.)$$

oder:

$$\mu!\ F(\mathfrak{P}_0) = \Sigma F(\mathfrak{P}_i) = \Sigma\,\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ldots F(\mathfrak{S}_k).$$

Von den $\mathfrak{S}_i$ sind immer $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ldots$ identisch. $\mathfrak{S}_0$ ist mit dem Prismatoid $\mathfrak{P}$ identisch und hierfür ist $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=0$; $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ldots=0!\ 0!\ 0!\ldots=1$ und

$$(\alpha+1)!\ \ (\beta+1)!\ \ (\gamma+1)!\ldots=1.$$

$\mathfrak{S}_0 \equiv \mathfrak{P}$ und auch jeder seiner Punkte, zwischen dessen Koordinaten keine Übereinstimmungen bestehen, kommt mithin nur einmal vor, wie es sein muss.

Wir betrachten alle diejenigen $\mathfrak{S}_k$, deren Punkte f Gruppen von ξ gleichen Koordinaten, g Gruppen von η gleichen Koordinaten u. s. w. besitzen. Es ist hier:

$$f\xi + g\eta + \ldots = \mu \qquad (\xi \geqq 1;\ \eta \geqq 1\ldots)$$

Es giebt $\frac{\mu!}{f!\,(\xi!)^f\,g!\,(\eta!)^g\ldots}$ solcher Prismatoide; sie stehen in der $\mathfrak{S}_i$-Reihe je $((\xi-1)!)^f\,((\eta-1)!)^g\ldots$ mal und erschöpfen dieselbe, wenn man alle Zerlegungen $f\xi+g\eta+\ldots=\mu$ berücksichtigt. Wir haben also:

$$\mu!\,F(\mathfrak{P}_0) = \Sigma\,F(\mathfrak{P}_i) = \Sigma \frac{\mu!}{f!\,\xi^f\,g!\,\eta^g\ldots} F(\mathfrak{S}_r); \qquad 7.)$$

wo rechts in Hinsicht auf alle möglichen Zerlegungen von μ summiert ist. Die Reihe $\mathfrak{S}_r$ enthält nur solche Prismatoide, welche nicht nur verschiedenen, sondern auch unähnlichen Gleichungssystemen entsprechen. Gleichungssysteme nennen wir unähnlich, wenn sie verschiedenen Zerlegungen von μ entsprechen.

Die Gleichung 7.) lautet in die Sprache der Arithmetik übersetzt:

---

1) Diese Identität zeigt Cauchy: Exercices d'analyse III 173.

$$F_\mu(n) = F(x_0 + x_1 + \ldots x_{\mu-1} = n)^{1}) = \qquad 8.)$$

$$0 \leqq x_0 \leqq x_1 \ldots \leqq x_{\mu-1}$$

$$\sum \frac{1}{f!\ \xi^f\ g!\ \eta^g \ldots} F(\xi(x_0^{(\xi)} + x_1^{(\xi)} \ldots x_{f-1}^{(\xi)}) + \eta(x_0^{(\eta)} + \ldots x_{g-1}^{(\eta)}) + \ldots = n)$$

$$x_0^{(\xi)} \geqq 0;\ x_1^{(\xi)} \geqq 0 \ldots x_0^{(\eta)} \geqq 0$$

$$x_0^{(\xi)} \gtreqless x_1^{(\xi)} \ldots \gtreqless x_0^{(\eta)} \gtreqless \ldots$$

$$x_0^{(\xi)} = x_0 = x_1 \ldots x_{\xi-1};\ x_1^{(\xi)} = x_\xi = \ldots x_{2\xi-1};\ \ldots;$$

$$x_{f-1}^{(\xi)} = x_{(f-1)\xi} = \ldots x_{f\xi-1};\ x_0^{(\eta)} = x_{f\xi} = \ldots x_{f\xi+\eta-1};\ \ldots$$

oder in einfacherer Bezeichnung: $F_\mu(n) = \sum \frac{1}{f!\ \xi^f\ g!\ \eta^g \ldots} \varphi_{\mu = f\xi + g\eta + \ldots}(n)$ 8.)a.

In 8.) und 8.)a. werden z. B. die Zerlegungen $0 + 0 + 2 + 2 = n = 4$

und $2 + 2 + 0 + 0 = n = 4$

rechts als verschiedene gezählt.

Die Gleichung 8.) ergiebt folgenden Satz:

„Multipliziert man jede Anzahl der Zerlegungen von n in f Gruppen von ξ aufeinander folgenden gleichen Summanden, in g dahinter stehende Gruppen von η aufeinander folgenden gleichen Summanden u. s. w., wobei die Summanden-Gruppen nicht nach der Grösse ihrer Summanden geordnet sind, mit dem Faktor $\frac{1}{f!\ \xi^f\ g!\ \eta^g \ldots}$ und summiert in Hinsicht auf alle Zerlegungen $\mu = f\xi + g\eta + \ldots$, so erhält man die Anzahl der Zerlegungen von n in μ der Grösse nach geordnete Summanden."

§ 3. Wir betrachten zunächst die Zerlegung von n in μ gleiche Summanden; die Anzahl $F(\mu\, x^{(\mu)} = n)$ ist gleich 1, wenn $n \equiv 0 \pmod{\mu}$

sie ist gleich 0, wenn $n \not\equiv 0 \pmod{\mu}$.

Bezeichnen wir den kleinsten positiven Rest einer Zahl n *modulo* μ mit $\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)$, so ist:

$$F(\mu\, x^{(\mu)} = n) = \frac{1}{\mu}\left(-\Re\left(\frac{n}{\mu}\right) + \Re\left(\frac{n-1}{\mu}\right) + 1\right) \qquad 9.)$$

Es sei ferner für eine Zerlegung $\xi = 1$; dann ist: 10.)

$$F(x_0^{(1)} + x_1^{(1)} + \ldots x_{f-1}^{(1)} + \eta \overset{g}{\Sigma} x^{(\eta)} + \ldots = n) - F(x_0^{(1)} + x_1^{(1)} + \ldots x_{f-1}^{(1)} + \eta \overset{g}{\Sigma} x^{(\eta)} + \ldots = n-1)$$

$$x_0^{(1)} \gtreqless x_1^{(1)} \ldots \gtreqless x_{f-1}^{(1)} \gtreqless \ldots$$

$$= F(x_1^{(1)} + \ldots x_{f-1}^{(1)} + \eta \overset{g}{\Sigma} x^{(\eta)} + \ldots = n)$$

Die Herleitung ist dieselbe wie in § 1; S. 5. 10.) lautet in anderer Bezeichnung:

$$\varphi_{\mu = f.1 + g\eta + \ldots}(n) - \varphi_{\mu = f.1 + g\eta + \ldots}(n-1) = \varphi_{\mu = (f-1).1 + g\eta + \ldots}(n) \qquad 10.)a.$$

Wenn $\varphi_{\mu = f-1+g\eta+\ldots}(n)$ gefunden ist, lässt sich hieraus, wie später ausgeführt wird, $\varphi_{\mu = f+g\eta+\ldots}(n)$ bis auf ein von n und seinen Divisionsresten unabhängiges Glied bestimmen. Dieses ergiebt sich aus der Beziehung:

$$\varphi_{\mu = f+g\eta+\ldots}(0) = 1.$$

$\varphi_{\mu = f+g\eta+\ldots}(n)$ lässt sich mithin auf $\varphi_{\mu = f-1+g\eta+\ldots}(n)$, also auch auf $\varphi_{\mu = f-2+g\eta+\ldots}(n)$ u. s. w. auf $\varphi_{\mu = g.\eta+\ldots}(n)$ zurückführen. Wir brauchen daher nur noch solche $\varphi_{\mu = f.\xi+g\eta+\ldots}(n)$ zu berücksichtigen, wo $\xi > 1$; $\eta > 1 \ldots$ ist.

Haben ξ, $\eta \ldots$ den grössten gemeinschaftlichen Teiler λ, so ist:

---

1) Bezeichnung nach K. Th. Vahlen: „Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie". Crelle's J. Bd. 112.

$$F\left(\xi \overset{f}{\Sigma} x^{(\xi)} + \eta \overset{g}{\Sigma} x^{(\eta)} + \ldots = n\right) = F\left(\frac{\xi}{\lambda} \overset{f}{\Sigma} x^{(\xi)} + \frac{\eta}{\lambda} \overset{g}{\Sigma} x^{(\eta)} + \ldots = \frac{n}{\lambda}\right) \frac{-\Re\left(\frac{n}{\lambda}\right) + \Re\left(\frac{n-1}{\lambda}\right) + 1}{\lambda}$$

oder: 11.)

$$\underset{\mu = f\xi + g\eta + \ldots}{\varphi^{(n)}} = \varphi\left(\frac{n}{\lambda}\right) \underset{\mu = f\cdot\frac{\xi}{\lambda} + g\frac{\eta}{\lambda} + \ldots}{} \cdot \frac{-\Re\left(\frac{n}{\lambda}\right) + \Re\left(\frac{n-1}{\lambda}\right) + 1}{\lambda} \cdot \qquad 11.)\text{a.}$$

φ lässt sich, wie man aus 14.) und dem folgenden sieht, auch für gebrochene Werte von $\frac{n}{\lambda}$ berechnen, verliert aber dann seine Bedeutung als Anzahl. Wir brauchen also nur diejenigen Zerlegungen zu betrachten, für die ξ, η ... den grössten gemeinsamen Teiler 1 haben und ausserdem grösser als 1 sind.

Haben wir zunächst eine Zerlegung von n in eine Gruppe von ξ gleichen Summanden und in eine Gruppe von η gleichen Summanden, so ist:

$$\xi\, x^{(\xi)} + \eta\, x^{(\eta)} = n. \qquad 12.)$$

Dies kann man als eine unbestimmte Gleichung für $x^{(\xi)}$ und $x^{(\eta)}$ auffassen. Die Anzahl der möglichen ganzzahligen Lösungen 0 eingeschlossen ist

$$F\left(\xi x^{(\xi)} + \eta\, x^{(\eta)} = n\right)$$

Man kann, da ξ und η als teilerfremd vorausgesetzt werden, ξ' und η' so bestimmen, dass:

$$\mp \xi\, \eta' \pm \eta\, \xi' = 1 \qquad 13.)$$

Dann ist:

$$x^{(\xi)} = \mp \eta'\, n \pm \eta\, t$$
$$x^{(\eta)} = \pm \xi'\, n \mp \xi\, t$$

Gelten die oberen Vorzeichen, so haben wir die Bedingungen:

$$t \geqq \frac{\eta'\, n}{\eta}$$
$$t \leqq \frac{\xi'\, n}{\xi}$$

Es ist:

$$t = \left|\frac{\eta'\, n}{\eta}\right|^{1)};\ \left|\frac{\eta'\, n}{\eta}\right| + 1;\ \ldots \left|\frac{\xi'\, n}{\xi}\right|;\ \text{wenn } \Re\left(\frac{n}{\eta}\right) = 0$$

und:

$$t = \qquad \left|\frac{\eta'\, n}{\eta}\right| + 1;\ \ldots \left|\frac{\xi'\, n}{\xi}\right|;\ \text{wenn } \Re\left(\frac{n}{\eta}\right) > 0$$

Wir haben also:

$$F\left(\xi\, x^{(\xi)} + \eta\, x^{(\eta)} = n\right) = \left|\frac{\xi'\, n}{\xi}\right| - \left|\frac{\eta'\, n}{\eta}\right| + \frac{-\Re\left(\frac{n}{\eta}\right) + \Re\left(\frac{n-1}{\eta}\right) + 1}{\eta} \qquad 14.)$$

Wenn die unteren Zeichen gelten, muss man ξ und ξ' mit η und η' vertauschen; $\Re\left(\frac{\xi'\, n}{\xi}\right)$ und $\Re\left(\frac{\eta'\, n}{\eta}\right)$ können wir als lineare Funktionen von $\Re\left(\frac{n}{\xi}\right)$; $\Re\left(\frac{n+1}{\xi}\right)$ ... $\Re\left(\frac{n+\xi-1}{\xi}\right)$ und $\Re\left(\frac{n}{\eta}\right)$; $\Re\left(\frac{n+1}{\eta}\right) \ldots \Re\left(\frac{n+\eta-1}{\eta}\right)$ darstellen. Führen wir die Bezeichnung:

---

1) Unter $\left|\frac{n}{m}\right|$ soll hier und im Folgenden die in $\frac{n}{m}$ enthaltene grösste ganze Zahl verstanden werden.

$$G\left(\alpha,\ \Re\left(\frac{n}{\xi}\right)\right)=\alpha_0\,\Re\left(\frac{n}{\xi}\right)+\alpha_1\,\Re\left(\frac{n+1}{\xi}\right)+\ldots\ \alpha_{\xi-1}\,\Re\left(\frac{n+\xi-1}{\xi}\right)$$

ein, so haben wir:

$$F(\xi\,x^{(\xi)}+\eta\,x^{(\eta)}=n)=\pm\,n\left(\frac{\xi'}{\xi}-\frac{\eta'}{\eta}\right)+\ G\left(\alpha,\Re\left(\frac{n}{\xi}\right)\right)+G\left(\beta,\ \Re\left(\frac{n}{\eta}\right)\right);\qquad 14.)\text{a.}$$

worin das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem bei der Kettenbruchentwickelung von $\frac{\xi}{\eta}$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Quotienten auftritt.

Haben wir eine Zerlegung:

$$\xi\,x^{(\xi)}+\eta\,x^{(\eta)}+\psi\,x^{(\psi)}=n\qquad \psi\gtreqless\left\{\frac{\xi}{\eta}\right.\qquad 15.)$$

dann ist:

$$\underset{\mu=\xi+\eta+\psi}{\varphi\,(n)}=\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n)}+\underset{\mu=\xi+\eta+\psi}{\varphi\,(n-\psi)}\qquad 16.)$$

$$\underset{\mu=\xi+\eta+\psi}{\varphi\,(n)}=\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n)}+\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n-\psi)}+\ldots\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\left(\Re\left(\frac{n}{\psi}\right)\right)}$$

Ebenso kann man durch fortgesetztes Summieren $\underset{\mu=f\xi+g\eta+\ldots}{\varphi\,(n)}$ erhalten.

Man kann zwar voraussetzen, dass in 15.) $\xi;\ \eta;\ \psi\ldots$ ohne gemeinsamen Teiler sind, nicht aber, dass auch schon zwei dieser Zahlen teilerfremd sind. Man kann also setzen:

$$\xi=\bar{\xi}\,\lambda\,\lambda'';\ \eta=\bar{\eta}\,\lambda'\,\lambda;\ \psi=\bar{\psi}\,\lambda''\,\lambda',$$

worin $\bar{\xi};\ \bar{\eta};\ \bar{\psi};\ \lambda;\ \lambda';\ \lambda''$ teilerfremd sind.

Es ist nach 11.)a, da ξ und η den grössten gemeinschaftlichen Teiler λ haben:

$$\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n)}=\underset{\mu=\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\lambda}}{\varphi\left(\frac{n}{\lambda}\right)}\cdot\frac{-\Re\left(\frac{n}{\lambda}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{\lambda}\right)+1}{\lambda}$$

Ist $\varrho=\xi\,.\,\eta$: so nimmt $\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n)}$ in 16.) jedenfalls die Form an:

$$\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n)}=n\,.\,G\left(\mathfrak{a},\ \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)+G\left(\mathfrak{b},\ \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)\qquad 17.)$$

Wir führen nun folgende Summation aus: 18.)

$$S=n^h\,\Re\left(\frac{n}{m\,a}\right)\ +(n-m\,b)^h\,\Re\left(\frac{n-m\,b}{m\,a}\right)+\ldots\qquad\left[\Re\left(\frac{n}{m\,b}\right)\right]^h\Re\left[\frac{\Re\left(\frac{n}{m\,b}\right)}{m\,a}\right]$$

$$=n^h\,\Re\left(\frac{n}{m\,a}\right)+\ (n-m\,a\,b)^h\,\Re\left(\frac{n-m\,a\,b}{m\,a}\right)+\ldots\qquad\left[\Re\left(\frac{n}{m\,a\,b}\right)\right]^h\Re\left[\frac{\Re\left(\frac{n}{m\,a\,b}\right)}{m\,a}\right]$$

$$+(n-mb)^h\,\Re\left(\frac{n-mb}{m\,a}\right)+(n-m\,b\,(a+1))^h\,\Re\left(\frac{n-m\,b\,(a+1)}{m\,a}\right)+\ldots$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(n-m\,b\,(a-1))^h\,\Re\left(\frac{n-m\,b\,(a-1)}{m\,a}\right)+\ldots$$

Die in derselben Zeile stehenden Faktoren der Potenzen sind einander gleich; wir bekommen daher beim zeilenweisen Summieren: 19.)

$$S=\left[\mathfrak{G}^{(h+1)}(n+1)-\mathfrak{G}^{(h+1)}\left(\Re\left(\frac{n}{m\,a\,b}\right)\right)\right]\Re\left(\frac{n}{m\,a}\right)+\left[\mathfrak{G}^{(h+1)}(n+1-m\,b)-\mathfrak{G}^{(h+1)}\Re\left(\frac{n-m\,b}{m\,a\,b}\right)\right]\Re\left(\frac{n-m\,b}{m\,a}\right)$$

$$+\ldots\left[\mathfrak{G}^{(h+1)}(n+1-m\,b\,(a-1))-\mathfrak{G}^{(h+1)}\left(\Re\left(\frac{n-m\,b\,(a-1)}{m\,a\,b}\right)\right)\right]\Re\left(\frac{n-m\,b\,(a-1)}{m\,a\,b}\right)$$

worin $\mathfrak{G}^{(h+1)}(r)$ eine gewisse ganze Funktion $(h+1)$ten Grades von r bedeutet, welche sich durch eine Bernoullische[1]) Funktion darstellen lässt.

$$\mathfrak{G}^{(h+1)}(r)=\frac{(m\,a\,b)^h}{h+1}\,\varphi\left(\frac{r}{m\,a\,b},\,h+1\right)$$

S besteht also wiederum aus Produkten der Potenzen von n mit Divisionsresten von n.

Das gleiche gilt von $\underset{\mu=\xi+\eta+\ldots}{\varphi\,(n)}$, welches durch fortgesetzte derartige Summationen aus dem in 17.) berechneten $\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi\,(n)}$ entsteht, und also auch von $F_\mu(n)$.

Wir haben also den Satz:

„Die Anzahl der Zerlegungen einer positiven ganzen Zahl n in μ ganzzahlige Summanden, die positiv oder 0 sind und nach der Grösse geordnet sind, ist eine Summe von Produkten der Potenzen von n mit Divisionsresten von n."

Dies kann man auch aus dem Ausdruck von $F_{\mu-1}(n)$ für einen speziellen Wert von μ und der Beziehung

$$F_\mu(n)=F_{\mu-1}(n)+F_{\mu-1}(n-\mu)+\ldots F_{\mu-1}\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right)$$

in Verbindung mit 19.) schliessen.

In 18.) können a und b teilerfremd angenommen werden. Ist $h=0$, $m=1$; so bekommen wir statt 19.):

$$S=\left(\frac{n-\Re\left(\frac{n}{a\,b}\right)}{a\,b}+1\right)\Re\left(\frac{n}{a}\right)+\left(\frac{n-b-\Re\left(\frac{n-b}{a\,b}\right)}{a\,b}+1\right)\Re\left(\frac{n-b}{a}\right)+\ldots$$

$$=\frac{n}{a\,b}\left[\Re\left(\frac{n}{a}\right)+\Re\left(\frac{n-b}{a}\right)+\ldots\Re\left(\frac{n-b\,(a-1)}{a}\right)\right]+G\left(a,\,\Re\left(\frac{n}{a\,b}\right)\right)$$

und weil a und b teilerfremd sind:

$$=\frac{n}{a\,b}\binom{a}{2}+G\left(a,\,\Re\left(\frac{n}{a\,b}\right)\right) \qquad 19.)\text{a.}$$

Man erhält also in diesem Falle durch Summation von Divisionsresten nur Divisionsreste und ein von Divisionsresten freies in n lineares Glied.

Es sei ferner in 18.): $a=1$; so ist: 19.)b.

$$S=\left[\mathfrak{G}^{(h+1)}(n+1)-\mathfrak{G}^{(h+1)}\left(\Re\left(\frac{n}{m\,b}\right)\right)+\mathfrak{G}^{(h+1)}(n+1-m\,b)-\mathfrak{G}^{(h+1)}\left(\Re\left(\frac{n-m\,b}{m\,b}\right)\right)+\ldots\right]\Re\left(\frac{n}{m}\right)$$

Wir würden also, wenn $h=0$ wäre, in diesem Falle aus der Summation von Divisionsresten auch Produkte von n mit Divisionsresten erhalten.

---

1) Jakob Bernoulli: Ars coniectandi p. 97. — J. Raabe: Crelles J., Bd. 42. — Schlömilch: Ztschr. für Math. und Phys. I. 193.

Hat man nach 10.)a. $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ aus $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ zu berechnen, so kann man aus dem Produkt mit der höchsten Potenz von n, welches in $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ vorkommt: $n^h G\left(a, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$ statt durch Summation auch in folgender Weise das entsprechende Glied in $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ finden.

Wir haben in $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ — $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n-1)}$: 20.)

$$n^h G\left(a, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) - (n-1)^h G\left(a, \Re\left(\frac{n-1}{\varrho}\right)\right) = n^h\left[\Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)(a_0 - a_1) + \Re\left(\frac{n+1}{\varrho}\right)(a_1 - a_2) + \ldots\right]$$
$$+ h\, n^{h-1} G\left(a, \Re\left(\frac{n-1}{\varrho}\right)\right) \pm \ldots - (-1)^h G\left(a, \Re\left(\frac{n-1}{\varrho}\right)\right)$$

und setzen dies

$$= n^h G\left(a, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + h\, n^{h-1} G\left(a, \Re\left(\frac{n-1}{\varrho}\right)\right) + \ldots;$$

wir müssen aber untersuchen, ob dies immer möglich ist. Die zu $n^h G\left(a, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$ hinzugefügten Glieder müssen wir in $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ mit umgekehrtem Vorzeichen später berücksichtigen.

Aus 20.) folgt: 21.)

$$\begin{aligned} a_0 &- a_1 = \alpha_0 \\ a_1 &- a_2 = \alpha_1 \\ &\ldots\ldots \\ a_{\varrho-1} &- a_0 = \alpha_{\varrho-1}. \end{aligned}$$

Dies giebt die Bedingung $\Sigma\,\alpha = 0$; unter welche allein 20.) gebildet werden darf. Ist $\Sigma\,\alpha$ nicht gleich 0, so können wir es erreichen, indem wir jedes α um $\frac{c}{\binom{\varrho}{2}}$ vergrössern und den später zu berücksichtigenden Teil von $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ um $c\,n^h$ verkleinern. Es ist nun:

$$\alpha_0 + \frac{c}{\binom{\varrho}{2}} + \alpha_1 + \frac{c}{\binom{\varrho}{2}} + \ldots = 0$$
$$\frac{2\,c}{\varrho-1} + \Sigma\,\alpha = 0$$
$$c = -\frac{\varrho-1}{2}\,\Sigma\,\alpha\,.$$

Über den Wert $\Sigma\,a$ können wir willkürlich verfügen und ihn z. B. $= 0$ setzen. Wäre $\Sigma\,a \neq 0$; so würde das in $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ neu hinzugefügte Glied $-h\,.\,n^{h-1} G\left(a, \Re\left(\frac{n-1}{\varrho}\right)\right)$ in $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ den Beitrag $d\,.\,n^h$ liefern, wobei $d = -\frac{\varrho-1}{2}\,\Sigma\,a$; es ist in der That:

$$d\,n^h - d\,(n-1)^h = d\,.\,h\,.\,n^{h-1} + \ldots$$

und $d\,.\,h\,.\,n^{h-1}$ haben wir zu $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ hinzufügen müssen, wie vorhin $-c\,n^h$. Es kommt dann in $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ als Glied mit der $h$ten Potenz vor:

$$d\,.\,n^h + n^h G\left(a, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) = n^h\left[\left(a_0 + \frac{d}{\binom{\varrho}{2}}\right)\Re\left(\frac{n}{\varrho}\right) + \left(a_1 + \frac{d}{\binom{\varrho}{2}}\right)\Re\left(\frac{n+1}{\varrho}\right) + \ldots\right]$$

wo dann doch die Koëffizientensumme:

$$a_0 + \frac{d}{\binom{\varrho}{2}} + a_1 + \frac{d}{\binom{\varrho}{2}} + \ldots = 0 \quad \text{ist.}$$

Da mithin auch bei willkürlich gewähltem Wert von Σa die Koëffizientensumme des Gliedes mit n^h in $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ verschwindet, rechtfertigt sich die Wahl $\Sigma a = 0$; und wir haben:

$$\begin{aligned} -\varrho\, a_0 &= (0 \,.\, a_0 + 1 \,.\, a_1 + \ldots (\varrho-1)\, a_{\varrho-1}) - \frac{\varrho-1}{2}\sum a \\ -\varrho\, a_r &= (0 \,.\, a_r + 1\, a_{r+1} + \ldots (\varrho-1)\, a_{r-1}) - \frac{\varrho-1}{2}\sum a \end{aligned} \qquad 22.)$$

Man hat auf diese Weise den $n^h\, G\left(\alpha, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$ entsprechenden Beitrag in $\underset{\mu=f+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ erledigt und behält in dem übrigen Teil von $\underset{\mu=f-1+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ nur noch Glieder von der Form $n^{h-k}\, G\left(\beta, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$, welche auf dieselbe Weise succesive berücksichtigt werden, und $-c\, n^h$, welches den Beitrag $-c\, \mathfrak{G}^{(h+1)}(n+1)$ liefert.

Ebenso kann man statt durch Summation $\underset{\mu=\xi+\eta+\psi}{\varphi(n)}$ auf $\underset{\mu=\xi+\eta}{\varphi(n)}$; $\underset{\mu=f\xi+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ auf $\underset{\mu=(f-1)\xi+g\eta\ldots}{\varphi(n)}$ und $F_\mu(n)$ auf $F_{\mu-1}(n)$ zurückführen oder man kann dies nach der im zweiten Teil gezeigten Art bewerkstelligen, wo gleich alle Koëffizienten auf einmal erhalten werden.

§ 4. Es ist mit Hilfe des Vorhergehenden leicht, $F_\mu(n)$ für jeden speziellen Wert von μ darzustellen.

Es ist nach 8.)a, wenn man die $\underset{\mu=f\xi+g\cdot\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ ausrechnet:

$$F_1(n) = \frac{1}{1!\,1^1}\underset{\mu=1.1}{\varphi(n)} = 1 \qquad 23.)$$

$$\begin{aligned} F_2(n) &= \frac{1}{2!\,1^2}\underset{\mu=2.1}{\varphi(n)} + \frac{1}{1!\,2^1}\underset{\mu=1.2}{\varphi(n)} \\ &= \frac{1}{2!}\binom{n+1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\Re\left(\frac{n}{2}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{2}\right)+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(n) &= \frac{1}{3!\,1^3}\underset{\mu=3.1}{\varphi(n)} + \frac{1}{1!\,1^1\,1!\,2^1}\underset{\mu=1.1+1.2}{\varphi(n)} + \frac{1}{1!\,3^1}\underset{\mu=1.3}{\varphi(n)} \\ &= \frac{1}{3!}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\left|\frac{n}{2}\right|+1\right) + \frac{1}{3}\,\frac{-\Re\left(\frac{n}{3}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{3}\right)+1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(n) &= \frac{1}{4!}\underset{\mu=4.1}{\varphi(n)} + \frac{1}{2!\,1^2\,1!\,2^1}\underset{\mu=2.1+1.2}{\varphi(n)} + \frac{1}{1!\,1^1\,1!\,3^1}\underset{\mu=1.1+1.3}{\varphi(n)} + \frac{1}{2!\,2^2}\underset{\mu=2.2}{\varphi(n)} + \frac{1}{1!\,4^1}\underset{\mu=1.4}{\varphi(n)} \\ &= \frac{1}{4!}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{2!\,2}\left[\frac{1}{2}\left(\binom{n+2}{2} + \left|\frac{n}{2}\right|+1\right)\right] + \frac{1}{3}\left(\left|\frac{n}{3}\right|+1\right) \\ &\quad + \frac{1}{2!\,2^2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{1-\Re\left(\frac{n}{2}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{-\Re\left(\frac{n}{4}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{4}\right)+1}{4} \end{aligned}$$

$\underset{\mu=2.2}{\varphi(n)}$ ist nach 11.)a aus $\underset{\mu=2.1}{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$ berechnet.

$$F_5(n) = \frac{1}{5!\,1^5}\,\varphi_{\mu=5.1}(n) + \frac{1}{3!\,1^3\,1!\,2^1}\,\varphi_{\mu=3.1+1.2}(n) + \frac{1}{2!\,1^2\,1!\,3^1}\,\varphi_{\mu=2.1+1.3}(n) + \frac{1}{1!\,1^1\,1!\,4^1}\,\varphi_{\mu=1.1+1.4}(n)$$

$$+ \frac{1}{1!\,1^4\,2!\,2^2}\,\varphi_{\mu=1.1+2.2}(n) + \frac{1}{1!\,2^1\,1!\,3^1}\,\varphi_{\mu=1.2+1.3}(n) + \frac{1}{1!\,5^1}\,\varphi_{\mu=1.5}(n)$$

$$= \frac{1}{5!}\binom{n+4}{4} + \frac{1}{3!\,2}\left(\frac{1}{2}\binom{n+3}{3} + \frac{1}{4}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{4}\left|\frac{n}{2}\right| + \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{2!\,3}\left(\frac{1}{3}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{3}\binom{n+1}{1} - \frac{1}{27}\left(\Re\binom{n}{3} - 5\,\Re\binom{n+1}{3} - 2\,\Re\left(\frac{n+2}{3}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\left|\frac{n}{4}\right| + 1\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2!\,2^2}\left(\frac{1}{4}\,n\,\Re\binom{n}{2} - \frac{5}{8}\,\Re\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{4}\binom{n+1}{2} + \frac{5}{8}\,n + 1\right)$$

$$+ \frac{1}{2\,.\,3}\left[\left|\frac{n}{2}\right| - \left|\frac{n}{3}\right| + \frac{1}{3}\left(1 - \Re\left(\frac{n}{3}\right) + \Re\left(\frac{n-1}{3}\right)\right)\right] + \frac{1}{5}\,\frac{-\Re\binom{n}{5} + \Re\binom{n-1}{5} + 1}{5}.$$

$\varphi_{\mu=1.2+1.3}(n)$ ist nach 14.) berechnet als Anzahl der Lösungen der unbestimmten Gleichung:

$$2\,x^{(\xi)} + 3\,x^{(\eta)} = n.$$

In 23.) sind für $F_2(n)$; $F_3(n)$; $F_4(n)$; $F_5(n)$ die um 1 verminderten vom Faktor n freien Glieder zusammen ≤ 0 und > -1; man kann sie deshalb fortlassen und dafür das grösste Ganze aus dem übrigen Teil nehmen, weil ja $F_\mu(n)$ stets eine ganze Zahl und also $F_\mu(n) = |F_\mu(n)|$ sein muss.

Man erhält daher durch einige Umformungen:

$$F_1(n) = 1. \qquad 24.)$$

$$F_2(n) = \left|\frac{n}{2}\right| + 1.$$

$$F_3(n) = \left|\frac{n^2 + 6n}{12}\right| + 1.$$

$$F_4(n) = \left|\frac{n^3 + 6n^2 + 72n + 18\left|\frac{n}{2}\right| n}{144}\right| + 1.$$

$$F_5(n) = \left|\frac{n^4 + 30n^3 + 220n^2 + 1320n + 180\left|\frac{n}{2}\right| . n}{2880}\right| + 1$$

Für $\mu = 3$ hat Herr J. J. Sylvester in seiner Abhandlung: „On Subinvariants i. e. Semi-Invariants to Binary Quantics of an Unlimited Order" American Journal of Mathematics V. 5. p. 79 auf Grund der Cayley'schen Theorie der Zerlegung ganzer Zahlen und Herr Joh. Zuchristian in den Monatsheften für Math. und Phys. IV, p. 185 auf elementarem Wege die der obigen gleichwertige Darstellung gefunden, dass $F_3(n) = \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\}$ d. h. $= \text{der} \frac{(n+3)^2}{12}$ zunächst liegenden ganzen Zahl ist. Für $F_4(n)$ hat Herr Zuchristian zwar angegeben, wie die Darstellung für $n \equiv 2k \pmod{12}$ und wie sie für $n \equiv 2k+1 \pmod{12}$ lautet, aber keine Darstellung für beliebiges n. Dagegen giebt Herr J. Hermes[1]) für mehrere Werte von μ eine bezüglich n independente Darstellung und zeigt auf Grund einer ähnlichen Beziehung wie 8.) die Möglichkeit zu ferneren Darstellungen, die freilich (nach Herrn J. Hermes' eigener Meinung) sehr kompliziert werden. Gleiches gilt von den Resultaten Cayley's[2]) und Sylvesters[3]).

1) Math. Ann. XLVII. 2) Phil. Trans. 1855—58. 3) The Quaterly Journal of pure and applied mathematics 1857.

II.

§ 5. Ehe wir zur Reduktion der Koëffizienten von $F_\mu(n)$ auf die Koëffizienten von $F_{\mu-1}(n)$ schreiten, wollen wir eine dafür wesentliche Bemerkung machen. Hat man nämlich eine Funktion $\Phi(n)$ dargestellt als Summe von Produkten der Potenzen von n und Divisionsresten von n mit dem Nenner ϱ:

$$\Phi(n) = n^t\, G\left(\beta^{(t)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + n^{t-1} G\left(\beta^{(t-1)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + \ldots G\left(\beta^{(0)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right); \quad (\varrho > 1)$$

so ist diese Darstellung nur auf eine einzige Weise möglich. Wenn für jeden Wert von n:

$$\Phi(n) = \overline{\Phi}(n) = n^t\, G\left(\bar{\beta}^{(t)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + n^{t-1} G\left(\bar{\beta}^{(t-1)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + \ldots G\left(\beta^{(0)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right);$$

so muss diese Darstellung mit der vorigen identisch sein und es sind die Faktoren gleicher Potenzen von n und in diesen Faktoren die rationalen Koëffizienten gleicher Divisionsreste einander gleich, so dass:

$$\beta_0^{(t)} = \bar{\beta}_0^{(t)};\ \beta_1^{(t)} = \bar{\beta}_1^{(t)} \ldots;\ \beta_0^{(t-1)} = \bar{\beta}_0^{(t-1)};\ \ldots$$

Dies erkennt man leicht aus folgender Betrachtung. Denkt man sich für eine bestimmte ganze Zahl $n_1 \equiv r \pmod{\varrho}$; wo $r = \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)$ ist, die Faktoren der Potenzen von n_1:

$$G\left(\beta^{(t)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right);\ G\left(\beta^{(t-1)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right) \ldots$$

und ebenso: $G\left(\bar{\beta}^{(t)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right);\ G\left(\bar{\beta}^{(t-1)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right) \ldots$ als rationale Zahlen berechnet, so behalten sie diese Werte bei, wenn man statt n_1 irgend eine der unendlich vielen modulo ϱ kongruenten Zahlen setzt.

Da nun zwei ganze rationale Funktionen $\Phi(n_1)$ und $\Phi(n_1)$, welche für unendlich viele Argumente übereinstimmen, identisch übereinstimmen, so ist:

$$G\left(\beta^{(t)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right) = G\left(\bar{\beta}^{(t)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right);\ G\left(\beta^{(t-1)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right) = G\left(\bar{\beta}^{(t-1)}, \Re\left(\frac{n_1}{\varrho}\right)\right);\ \ldots$$

Da die Wahl von n_1 keiner Einschränkung unterliegt, gelten dieselben Gleichungen für jedes beliebige $n \equiv r \pmod{\varrho}$; wo $\Re\left(\frac{n}{\varrho}\right) = r = 0,1, \ldots \varrho - 1$ ist. Wenn aber z. B. $G\left(\beta^{(t)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$ und $G\left(\bar{\beta}^{(t)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$ für jedes beliebige n und also für ϱ verschiedene modulo ϱ inkongruente Werte von $\Re\left(\frac{n}{\varrho}\right) = 0,1 \ldots \varrho - 1$ übereinstimmen, stimmen sie identisch überein, dies erkennt man, wenn man in $G\left(\beta^{(t)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) = G\left(\bar{\beta}^{(t)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$ für $\Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)$ nacheinander $0,1 \ldots \varrho - 1$ setzt und dadurch folgende Gleichungen bildet:

$$(\beta_0^{(t)} - \bar{\beta}_0^{(t)}) \cdot 0 + (\beta_1^{(t)} - \bar{\beta}_1^{(t)}) \cdot 1 + \ldots (\beta_{\varrho-1}^{(t)} - \bar{\beta}_{\varrho-1}^{(t)})(\varrho - 1) = 0$$

$$(\beta_0^{(t)} - \bar{\beta}_0^{(t)}) \cdot 1 + (\beta_1^{(t)} - \bar{\beta}_1^{(t)}) \cdot 2 + \ldots (\beta_{\varrho-1}^{(t)} - \bar{\beta}_{\varrho-1}^{(t)}) \cdot 0 = 0$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$(\beta_0^{(t)} - \bar{\beta}_0^{(t)})(\varrho-1) + (\beta_1^{(t)} - \bar{\beta}_1^{(t)}) \cdot 0 + \ldots (\beta_{\varrho-1}^{(t)} - \bar{\beta}_{\varrho-1}^{(t)})(\varrho - 2) = 0$$

Addiert man alle diese ϱ-Gleichungen, so erhält man:

$$(\beta_0^{(t)} - \bar{\beta}_0^{(t)}) + (\beta_1^{(t)} - \bar{\beta}_1^{(t)}) + \ldots (\beta_{\varrho-1}^{(t)} - \bar{\beta}_{\varrho-1}^{(t)}) = 0$$

Subtrahiert man die erste dieser ϱ-Gleichungen von der zweiten, so erhält man:

$$(\beta_0^{(\iota)} - \overline{\beta}_0^{(\iota)}) + (\beta_1^{(\iota)} - \overline{\beta}_1^{(\iota)}) + \ldots (\beta_{\varrho-1}^{(\iota)} - \overline{\beta}_{\varrho-1}^{(\iota)}) - \varrho\ (\beta_{\varrho-1}^{(\iota)} - \overline{\beta}_{\varrho-1}^{(\iota)}) = 0;$$

also ist: $\beta_{\varrho-1}^{(\iota)} - \overline{\beta}_{\varrho-1}^{(\iota)} = 0$; ebenso ist:

$\beta_0^{(\iota)} = \overline{\beta}_0^{(\iota)}$; $\beta_1^{(\iota)} = \overline{\beta}_1^{(\iota)}$ ... und auch:

$\beta_0^{(\iota-1)} = \overline{\beta}_0^{(\iota-1)}$; $\beta_1^{(\iota-1)} = \overline{\beta}_1^{(\iota-1)}$ ... u. s. w.

Hiermit ist die oben gemachte Bemerkung bewiesen.

Ferner machen wir noch darauf aufmerksam, dass, wie man aus der allgemeinen Erörterung in § 3 und den Spezialfällen in § 4 erkennt, als Nenner der in $F_\mu(n)$ auftretenden Divisionsreste von n nur die Zahlen: 2, 3, ... $\mu - 1$, μ vorkommen. Alle diesen Nennern zukommenden Divisionsreste von n können wir, wie ohne weiteres ersichtlich ist, als lineare, rationale Funktionen solcher Divisionsreste darstellen, deren Nenner irgend ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, ... $\mu - 1$, μ ist.

Wir können annehmen, die Funktion $F_{\mu-1}(n)$ sei in folgender Form dargestellt:

$$F_{\mu-1}(n) = n^{\mu-2}\ G\left(\alpha^{(\mu-2)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + n^{\mu-3}\ G\left(\alpha^{(\mu-3)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + \ldots G\left(\alpha^{(0)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right); \qquad 25.)$$

weil wir es allgemein in § 3 und an Beispielen in § 4 gezeigt haben.

ϱ ist ein gemeinschaftliches Vielfaches der vorkommenden Nenner von n : 2, 3 ... $\mu - 1$; wir nehmen an, es sei $\varrho = \mu \,.\, q$ und also ϱ ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3 ... $\mu - 1$, μ. Wir stellen uns nun die Aufgabe $F_\mu(n)$ aus $F_{\mu-1}(n)$ herzuleiten.

Es ist bekanntlich:

$$F_\mu(n) - F_\mu(n - \mu) = F_{\mu-1}(n) \qquad \mu > 1 \qquad 26.)$$

Hätten wir schon eine Funktion $\mathfrak{F}_\mu(n)$ gefunden, welche die in 26.) dargestellte Eigenschaft von $F_\mu(n)$ besitzt:

$$\mathfrak{F}_\mu(n) - \mathfrak{F}_\mu(n - \mu) = F_{\mu-1}(n); \qquad 26.)\text{a.}$$

so können wir mit ihrer Hilfe $F_\mu(n)$ berechnen.

Es ist nämlich:

$$F_\mu(n) - \mathfrak{F}_\mu(n) = F_\mu(n - \mu) \quad \mathfrak{F}_\mu(n - \mu) - F_\mu(n - 2\mu) - \mathfrak{F}_\mu(n - 2\mu) = \ldots$$

$$= F_\mu\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) - \mathfrak{F}_\mu\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right)$$

Da nun:

$$F_\mu\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) = F_{\mu-1}\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right); \qquad 27.)$$

so ist:

$$F_\mu(n) = \mathfrak{F}_\mu(n) - \mathfrak{F}_\mu\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) + F_{\mu-1}\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) \qquad 28.)$$

Wir setzen nun, da $F_\mu(n)$ eine der Funktionen $\mathfrak{F}_\mu(n)$ ist und seine Form schon bekannt ist, auch $\mathfrak{F}_\mu(n)$ in dieselbe Form und berechnen $\mathfrak{F}_\mu(n)$. Es sei:

$$\mathfrak{F}_\mu(n) = n^{\mu-1}\ G\left(\alpha^{(\mu-1)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + n^{\mu-1}\ G\left(\alpha^{(\mu-2)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) + \ldots G\left(\alpha^{(0)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) \qquad 29.)$$

dann ist:

$$\mathfrak{F}_\mu(n-\mu) = (n-\mu)^{\mu-1}\ G\left(\alpha^{(\mu-1)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right) + \ldots G\left(\alpha^{(0)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right)$$

Aus 26.)a. erhalten wir, da die Faktoren gleicher Potenzen auf beiden Seiten gleich sind, wie wir oben bemerkt haben:

$$G\left(a^{(\mu-1)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) - G\left(a^{(\mu-1)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right) = 0 \qquad 30.)$$

. . . . . .

$$G\left(a^{(h)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) - G\left(a^{(h)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right) - \binom{h+1}{h}(-\mu)\, G\left(a^{(h+1)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right)$$

$$- \ldots \binom{\mu-1}{h}(-\mu)^{\mu-h-1} G\left(a^{(\mu-1)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right) = G\left(a^{(h)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$$

. . . . . .

$$G\left(a^{(0)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) - G\left(a^{(0)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right) - (-\mu)\, G\left(a^{(0)}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right)$$

$$\ldots (-\mu)^{\mu-1} G\left(a^{\mu-1}, \Re\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right)\right) = G\left(a^{(0)}, \Re\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right)$$

In 30.) sind die Koëffizienten von $\Re\left(\frac{n+l+i\mu}{\varrho}\right)$, da die Darstellung in den G eine eindeutige ist, einander gleich; wir erhalten:

$$a_{l+i\mu}^{(\mu-1)} - a_{l+(i+1)\mu}^{(\mu-1)} = 0 \qquad 31.)$$

. . . . . .

$$a_{l+i\mu}^{(h)} - a_{l+(i+1)\mu}^{(h)} - \binom{h+1}{h}(-\mu)\, a_{l+(i+1)\mu}^{(h+1)} - \binom{h+2}{h}(-\mu)^2 a_{l+(i+1)\mu}^{(h+2)} - \ldots \binom{\mu-1}{h}(-\mu)^{\mu-1-h} a_{l+(i+1)\mu}^{(\mu-1)} = \alpha_{l+i\mu}^{(h)}$$

. . . . . .

$$a_{l+i\mu}^{(0)} - a_{l+(i+1)\mu}^{(0)} - (-\mu)\, a_{l+(i+1)\mu}^{(h+1)} - \ldots \ldots \ldots \ldots (-\mu)^{\mu-1} a_{l+(i+1)\mu}^{(\mu-1)} = \alpha_{l+i\mu}^{(0)}$$

$$\begin{pmatrix} i = 0,1 \ldots q-1 \\ l = 0,1 \ldots \mu-1 \end{pmatrix};$$

$$q = \frac{\varrho}{\mu}$$

Durch die Gleichungen in 31.) sind alle a als lineare Funktionen der α bestimmt mit Ausnahme der $a^{(0)}$, von welchen dies nur hinsichtlich ihrer Differenzen gilt.

Um $a_l^{(h)} (h > 0)$ zu berechnen, multiplizieren wir die ersten $\mu - h + 1$ Gleichungen 31.) nach einander mit:

$$\binom{\mu-1}{\mu-h} \mu^{\mu-h}(q-i)^{\mu-h};\quad \binom{\mu-2}{\mu-h-1} \mu^{\mu-h-1}(q-i)^{\mu-h-1} \ldots h\,\mu\,(q-1);\quad 1$$

und summieren über $i = 0,1 \ldots q-1$.

Dann erhalten wir:

$$\sum_i h\,(\ldots\mu)\, a_{l+i\mu}^{(h)} (-1 + (q-i+1) - (q-i))$$

$$+ \ldots \sum_i (h+r \ldots 1)(\ldots\mu^r a_{l+i\mu}^{(h+r-1)} (-1 + r(q-i+1) - \binom{r}{2}(q-i+1)^2 \ldots \pm (q-i+1)^r - (q-i)^r)$$

$$+ \ldots + q\,h\,.\,\mu\, a_l^{(h)} + q^2 \binom{h+1}{2} \mu^2 a^{(h+1)} + \ldots q^{\mu-h} \binom{\mu-1}{h} \mu^{\mu-h}$$

$$= \sum_i [\alpha_{l+i\mu}^{(h-1)} + \alpha_{l+i\mu}^{(h)} h\,.\,\mu\,.\,(q-i) + \ldots \alpha_{l+i\mu}^{(\mu-2)} \binom{\mu-2}{\mu-h-1} (\mu(q-i))^{\mu-h-1}]$$

Die $\sum_i$ in der ersten und zweiten Zeile der Gleichung werden sämmtlich identisch 0; setzt man statt h nacheinander: $\mu-1$; $\mu-2$; $\ldots h+1$; h, so erhält man:

$$\varrho\,(\mu-1)\,a_l^{(\mu-1)} = \sum_i \alpha_{l+i\,\mu}^{(\mu-2)} \qquad 32.)$$

$$\varrho\,(\mu-2)\,a_l^{(\mu-2)} + \varrho^2\binom{\mu-1}{2}\,a_l^{(\mu-1)} = \sum_i \left[\alpha_{l+i\,\mu}^{(\mu-2)}\,(\mu-2)\,(\mu\,(q-i)) + \alpha_{l+i\,\mu}^{(\mu-3)}\right]$$

. . . . . .

$$\varrho\,.\,h\,a_l^{(h)} + \varrho^2\binom{h+1}{2}\,a_l^{(h+1)} + \ldots\,\varrho^{\mu-h}\binom{\mu-1}{\mu-h}\,a_l^{(\mu-1} = \sum_i \left[\alpha_{l+i\,\mu}^{(\mu-2)}\binom{\mu-2}{\mu-h-1}(\mu\,(q-i))^{\mu-h-1} + \ldots\,\alpha_{l+i\,\mu}^{(h-1)}\right]$$

Wir multiplizieren die Gleichungen 32.) nacheinander mit:

$$\frac{(\mu-2)!}{(\mu-h-1)!}\,\varrho^{\mu-h-1}\gamma_{\mu-h-1};\ \frac{(\mu-3)!}{(\mu-h-2)!}\,\varrho^{\mu-h-2}\gamma_{\mu-h-2}\ldots(h-1)!\,\gamma_0$$

und addieren.

Die γ sind so gewählt, dass links alle a_l mit Ausnahme von $a_l^{(h)}$ verschwinden.

Wir haben daher, wenn wir willkürlich $\gamma_0 = 1$ setzen, folgende Gleichungen für die γ:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = 1 \qquad 33.)\\
&\gamma_0 + 2\,\gamma_1 = 0\\
&\ldots\ldots\\
&\gamma_0 + \binom{t}{1}\gamma_1 + \binom{t}{2}\gamma_2 + \ldots\binom{t}{r}\,\gamma_r + \ldots\,t\,\gamma_{t-1} = 0.
\end{aligned}$$

Wir bilden die entsprechenden Gleichungen für $v_0;\ v_1 \ldots v_{t-1}$:

$$\begin{aligned}
&v_0 = u_0 \qquad 34.)\\
&v_0 + 2\,v_1 = u_1\\
&\ldots\ldots\\
&v_0 + \binom{t}{1}v_1 + \binom{t}{2}v_2 + \ldots\ t\,v_{t-1} = u_{t-1}
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen 34.) nach einander mit $t\,\gamma_{t-1};\ \binom{t}{2}\,\gamma_{t-2}\ldots\gamma_0$, so erhalten wir:

$$t\,v_{t-1} = \gamma_0\,u_{t-1} + t\,\gamma_1\,u_{t-2} + \ldots\,t\,\gamma_{t-1}\,u_0 \qquad 35.)$$

Wenn wir über die v willkürlich verfügen, sind die u dadurch bestimmt. Wir setzen

$v_r = v^r$; dann ergiebt sich

aus 34.): $u_{r-1} = (v+1)^r - v^r$ und wir haben

nach 35.): $t\,v^{t-1} = \gamma_0\,[(v+1)^t - v^t] + \binom{t}{1}\gamma_1\,[(v+1)^{t-1} - v^{t-1}] + \ldots$

oder:

$$\gamma_0(v+1)^t + \binom{t}{1}\gamma_1(v+1)^{t-1} + \binom{t}{2}\gamma_2\,(v+1)^{t-2} + \ldots = t\,v^{t-1} + \gamma_0\,v^t + \binom{t}{1}\gamma_1\,v^{t-1} + \ldots$$

und wenn v eine ganze Zahl ist: $= t\,(v^{t-1} + (v-1)^{t-1} + \ldots\,2^{t-1} + 1^{t-1})$ 36.)

Man sieht, die linke Seite von 36.) ist eine Bernoullische Funktion $t$ter Ordnung und es ist:

$$\gamma_0 = 1;\quad \gamma_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma_2 = +B_1;\quad \gamma_4 = -B_3;\quad \gamma_6 = +B_5\ldots\ldots$$

$$\gamma_3 = 0\quad;\quad \gamma_5 = 0\quad;\quad \gamma_7 = 0\ \ldots\ldots\ldots;$$

worin $B_1;\ B_3;\ B_5\ \ldots$ die Bernoullischen Zahlen sind.

Wir bekommen nunmehr aus 32.):

$$\varrho\,h!\,a_l^{(h)} = \sum_i\Big[\mu^{\mu-h-1}\,\alpha_{l+i\,\mu}^{(\mu-2}\,\frac{(\mu-2)!}{(\mu-h-1)!}\left(q^{\mu-h-1}\gamma_{\mu-h-1} + q_{(q-i)}^{\mu\ \ h-2}\binom{\mu-h-1}{1}\gamma_{\mu-h-2} + \ldots\,(q-i)^{\mu-h-1}\,\gamma_0\right)$$

$$+\ldots + \mu\,\alpha_{l+i\mu}^{(h)}\,\frac{h!}{1!}\,(q\,\gamma_1 + (q-i)\,\gamma_0) + \alpha_{l+i\,\mu}^{(h-1}\,\frac{(h-1)!}{0!}\,\gamma_0\Big]$$

und als Resultat: 37.)

$$h!\ a_i^{(h)} = \sum_{i,k} \varrho^{k-1}\ \alpha_{l+i\mu}^{(k+h-1)} \frac{(k+h-1)!}{k!}\left(\varphi\left(\frac{q-i}{q},\ k\right) + \gamma_k\right) + \sum_{\varrho}^{1}\ \alpha_{l+i\mu}^{(h-1)}\ (h-1)!$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots \mu - h - 1 \\ i = 0, 1, \ldots q - 1 \end{pmatrix};\ h > 0$$

worin $\varphi\left(\frac{q-i}{q},\ k\right)$ eine Bernoullische Funktion $k$ter Ordnung ist. Setzen wir $\varphi\left(\frac{q-i}{q},\ 0\right) = 0$, so haben wir:

$$h!\ a_i^{(h)} = \sum_{i,k} \varrho^{k-1}\ \alpha_{l+i\mu}^{(k+h-1)} \frac{(k+h-1)!}{k!}\left(\varphi\left(\frac{q-i}{q},\ k\right) + \gamma_k\right) \qquad 37.)\text{a.}$$

$$\begin{pmatrix} k = 0, 1 \ldots \mu - h - 1 \\ i = 0, 1 \ldots q - 1 \end{pmatrix};\ h > 0$$

§ 6. Da durch 31.) nur die Differenzen der $a_{l+i\mu}^{(0)}$ bestimmt sind, können wir unter ihnen eine willkürliche Beziehung herstellen z. B. ihre Summe $\Sigma\, a_{l+i\mu}^{(0)}$ durch die willkürliche Grösse $\mathfrak{a}_l^{(0)}$ bestimmen: 38.)

$$\sum_i a_{l+i\mu}^{(0)} + \frac{1}{2}\left(-\mu\right)\sum_i a_{l+i\mu}^{(1)} + \ldots \frac{1}{h+1}(-\mu)^h \sum_i a_{l+i\mu}^{(h)} \ldots + \frac{(-\mu)^{\mu-1}}{\mu}\sum_i a_{l+i\mu}^{(\mu-1)} = \sum_i \mathfrak{a}_{l+i\mu}^{(0)} = q\,\mathfrak{a}_l^{(0)}$$

$$(i = 0, 1 \ldots q-1);\quad \mathfrak{a}_{l+i\mu}^{(0)} = \mathfrak{a}_l^0$$

Fügt man diese Gleichung zu den ϱ-Gleichungen in 31.) hinzu und multipliziert das System von nunmehr $\varrho + 1$ Gleichungen mit:

$$\frac{\mu^{\mu}}{\mu}(q-i)^{\mu};\ \frac{\mu^{\mu-1}}{\mu-1}(q-i)^{\mu-1} \ldots \frac{\mu^{h+1}}{h+1}(q-i)^{h+1};\ \ldots \mu\,(q-i);\ \mu$$

so ist, wenn man addiert:

$$\sum_i C_i^{(\mu-1)}\ a_{l+i\mu}^{(\mu-1)} + \ldots \sum_i C_i^{(\nu)}\ a_{l+i\mu}^{(\nu)} + \ldots \qquad 39.)$$

$$+\varrho\, a_l^{(0)} + \frac{1}{2}\varrho^2 a_l^{(1)} + \frac{1}{3}\varrho^3 a_l^{(2)} + \ldots \frac{1}{\mu}\varrho^{\mu} a_l^{(\mu-1)} = \sum_i \left[\alpha_{l+i\mu}^{(\mu-2)}\left(\mu\,(q-i)\right)^{\mu-1}\frac{1}{\mu-1} + \ldots \alpha_{l+i\mu}^{(0)}\mu(q-i) + \mathfrak{a}_{l+i\mu}^{(0)}.\mu\right]$$

worin wieder die C_i identisch 0 werden.

Setzt man in 32.) $h = 1$ und fügt die Gleichung 39.) hinzu, so entsteht ein System von μ Gleichungen. Diese multiplizieren wir nacheinander mit:

$$\varrho^{\mu-1}\frac{(\mu-2)!}{(\mu-1)!}\gamma_{\mu-1};\ \ldots \varrho^h \frac{(h-1)!}{h!}\gamma_h;\ \ldots \varrho\,\gamma_1;\ \gamma_0$$

und erhalten

$$0!\ \varrho\, a_l^{(0)} = \sum_i \left[\mu^{\mu-1}\ \alpha_{l+i\mu}^{(\mu-2)}\frac{(\mu-2)!}{(\mu-1)!}\left(q^{\mu-1}\gamma_{\mu-1} + q^{\mu-2}(q-i)\binom{\mu-1}{1}\gamma_{\mu-2} + \ldots\right)\right.$$

$$\left. + \ldots \mu\ \alpha_{l+i\mu}^{(0)}\frac{0!}{1!}\left(q\,\gamma_1 + (q-i)\,\gamma_0\right) + \mu\,\mathfrak{a}_{l+i\mu}^{(0)}\right]$$

$$0!\ a_l^{(0)} = \sum_{i,k} \varrho^{k-1}\ \alpha_{l+i\mu}^{(k-1)}\ \frac{(k-1)!}{k!}\left(\varphi\left(\frac{q-i}{q},\ k\right) + \gamma_k\right) + \mathfrak{a}_l^{(0)} \qquad 40.)$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots \mu - 1 \\ i = 0, 1 \ldots q - 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht, die Gleichung für $a_l^{(0)}$ ist analog der Gleichung 37.)a. für $a_l^{(h)}$ abgesehen von dem Zusatz $\mathfrak{a}_l^{(0)}$. Setzen wir noch $[(k-1)!\ \alpha_{l+i\,\mu}^{(k-1)}]_{k=0} = 0$, so können wir auch hier summieren über $(k = 0, 1 \ldots \mu - 1)$ und 37.)a. gilt abgesehen von $\mathfrak{a}_l^{(0)}$ auch für $h = 0$. Gleichung 37.) und 40.) gelten nicht blos für

$$a_l \text{ wenn } l = 0, 1 \ldots \mu - 1$$

sondern auch für $\quad a_{l+p\mu}$ wo $l + p\,\mu = p\,\mu;\ p\,\mu + 1;\ \ldots (p+1)\,\mu - 1;\ (p = 0,1 \ldots q-1)$

also auch für $\quad a_r^{(h)}$ und $a_r^{(0)}\quad (r = 0,1 \ldots \varrho - 1)$

Natürlich werden die Indices der α und a nur mod ϱ gerechnet, so dass z. B. $a_3^{(h)} \equiv a_{\varrho+3}^{(h)}$ ist.

§ 7. Setzt man $Q_\mu(n)$ gleich dem Teil von $\mathfrak{F}_\mu(n)$, welcher den Faktor n besitzt, so ist, wenn $a_r^{(0)} = \bar{a}_r^{(0)} + \mathfrak{a}_r^{(0)}$ gesetzt wird.

$$\mathfrak{F}_\mu(n) = Q_\mu(n) + (\bar{a}_0^{(0)} + \mathfrak{a}_0^{(0)})\ \mathfrak{R}\left(\frac{n}{\varrho}\right) + (\bar{a}_\mu^{(0)} + \mathfrak{a}_0^{(0)})\ \mathfrak{R}\left(\frac{n+\mu}{\varrho}\right) + \ldots$$

$$\mathfrak{F}_\mu(n-\mu) = Q_\mu(n-\mu) + (\bar{a}_0^{(0)} + \mathfrak{a}_0^{(0)})\ \mathfrak{R}\left(\frac{n-\mu}{\varrho}\right) + (\bar{a}_\mu^{(0)} + \mathfrak{a}_0^{(0)})\ \mathfrak{R}\left(\frac{n}{\varrho}\right) + \ldots$$

und man erhält:

$$\mathfrak{F}_\mu(n) - \mathfrak{F}_\mu(n-\mu) = Q_\mu(n) - Q_\mu(n-\mu) + (\bar{a}_0^{(0)} - a_\mu^{(0)})\ \mathfrak{R}\left(\frac{n}{\varrho}\right) + \ldots$$

Diese Differenz ist frei von willkürlichen Grössen $\mathfrak{a}$, wie es sein muss, da diese Differenz $= F_{\mu-1}(n)$ ist. Ebenso ist frei von willkürlichen Grössen:

$$\mathfrak{F}_\mu(n-\mu) - \mathfrak{F}_\mu(n-2\,\mu)$$

und auch: $\quad \mathfrak{F}_\mu(n) \quad - \mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right)$

und endlich: $\quad F_\mu(n) \quad = \mathfrak{F}_\mu(n) - \mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) + F_{\mu-1}\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right)$

Die $\mathfrak{a}_r^{(0)}$ können wir in $\mathfrak{F}_\mu(n)$ gleich 0 setzen; in $F_\mu(n)$ haben sie dagegen wohlbestimmte Werte; es ist nämlich in $F_\mu(n)$:

$$G\left(\mathfrak{a}^{(0)}, \mathfrak{R}\left(\frac{n}{\varrho}\right)\right) = -\mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) + F_{\mu-1}\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) \qquad 41.)$$

Die Funktionen $\mathfrak{F}$ und F lassen sich auch für negative ganzzahlige Argumente berechnen, und es gilt auch dann 26.) bis 28.). Nur verliert F für negative Werte die Bedeutung als Anzahl von Zerlegungen.

Nach 26.)b. ist: $\quad F_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) - \mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) = F_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right) - \mu\right) - \mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right) - \mu\right);$

$\mu > 1$

Nach 26.) ist: $\quad F_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) - F_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right) - \mu\right) = F_{\mu-1}\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right)$

und mit Rücksicht auf 27.):

$$F_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right) - \mu\right) = 0 \qquad \text{also:}$$

$$-\mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) + F_{\mu-1}\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) = -\mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) + F_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right)$$

und: $\quad -\mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) + F_{\mu-1}\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right)\right) = -\mathfrak{F}_\mu\left(\mathfrak{R}\left(\frac{n}{\mu}\right) - \mu\right) \qquad 42.)$

und wir haben zur Bestimmung der $\mathfrak{a}$ statt 41.) die einfachere Gleichung:

$$G\left(\mathfrak{a}^{(0)}, \Re\binom{n}{\varrho}\right) = -\mathfrak{F}_\mu\left(\Re\left(\frac{n}{\mu}\right) - \mu\right) \qquad (\mu > 1) \qquad 43.)$$

Hieraus folgt:

$$\binom{\varrho}{2}\sum_{l,i}\mathfrak{a}^{(0)}_{l+i\mu} = q\sum_{l} -\mathfrak{F}(l-\mu) = -q\sum\mathfrak{F}_\mu(-l-1)$$
$$\begin{pmatrix} l = 0,1 \ldots \mu - 1 \\ i = 0,1 \ldots q - 1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir in 43.) für n nacheinander: $\varrho - l_1 - 1$ und $\varrho - l_1$ $(l_1 = 0,1 \ldots \mu - 1)$

so ist:

$$(\varrho - l_1 - 1)\,\mathfrak{a}^{(0)}_0 + \ldots (\varrho - 1)\,\mathfrak{a}^{(0)}_{l_1} + \ldots (\varrho - l_1 - 2)\,\mathfrak{a}^{(0)}_{\varrho-1} = -\mathfrak{F}_\mu(-l_1 - 1)$$
$$(\varrho - l_1)\,\mathfrak{a}^{(0)}_0 + \ldots\ldots\ 0\,.\,\mathfrak{a}^{(0)}_{l_1} + \ldots (\varrho - l_1 - 1)\,\mathfrak{a}^{(0)}_{\varrho-1} = -\mathfrak{F}_\mu(-l_1)$$

und durch Subtraction:

$$\varrho\,\mathfrak{a}^{(0)}_{l_1} - \sum_{l,i}\mathfrak{a}^{(0)}_{l+i\mu} = \mathfrak{F}_\mu(-l_1) - \mathfrak{F}_\mu(-l_1 - 1)$$

Also ist:

$$\mathfrak{a}^{(0)}_{l_1} = \mathfrak{a}^{(0)}_{l_1+i\mu} = \frac{1}{\varrho}\left(\mathfrak{F}_\mu(-l_1) - \mathfrak{F}_\mu(-l_1 - 1) - \frac{q}{\binom{\varrho}{2}}\sum_{l}\mathfrak{F}_\mu(-l-1)\right) \qquad 44.)$$
$$l_1 > 0$$

und:

$$\mathfrak{a}^{(0)}_0 = \frac{1}{\varrho}\left(\mathfrak{F}_\mu(-\mu) - \mathfrak{F}_\mu(-1) - \frac{q}{\binom{\varrho}{2}}\sum_{l}\mathfrak{F}_\mu(-l-1)\right)$$

oder, da $\mathfrak{F}_\mu(-\mu) = \mathfrak{F}_\mu(0) - F_{\mu-1}(0) = \mathfrak{F}_\mu(0) - 1$ ist:

$$\mathfrak{a}^{(0)}_0 = \mathfrak{a}^{(0)}_{i\mu} = -\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\left(\mathfrak{F}_\mu(0) - \mathfrak{F}_\mu(-1) - \frac{q}{\binom{\varrho}{2}}\sum\mathfrak{F}_\mu(-l-1)\right) \qquad 44.)\text{a.}$$

Ersetzt man $\mathfrak{F}_\mu(-l_1)$ durch:

$$\mathfrak{F}_\mu(-l_1) = \sum_{h,r}(-l_1)^h\,(r - l_1 + \varrho\,.\,\varepsilon_{-r+l_1})\,a^{(h)}_r \qquad \begin{pmatrix} r = 0,1 \ldots \varrho - 1 \\ h = 0,1 \ldots \mu - 1 \\ \varepsilon_{-r+l_1} = 0 \text{ für } r - l_1 \geqq 0 \\ \quad = 1 \text{ für } r - l_1 < 0 \end{pmatrix} \qquad 45.)$$

und die $a^{(h)}_r$ durch die Ausdrücke aus 37.) und 40.); — wobei natürlich in 40.) $\mathfrak{a}^{(0)}_r$, welches ja für $\mathfrak{F}_\mu$ verschwindet, fortgelassen wird —, so erhält man auch für jedes $\mathfrak{a}^{(0)}_r$ eine Darstellung als lineare Funktion der Grössen $\alpha^{(0)}_r$; $\alpha^{(1)}_r$; $\ldots$ $\alpha^{(\mu-2)}_r$

Es sind also in der That sämmtliche Koëffizienten von $F_\mu(n)$ als lineare Funktionen der Koëffizienten von $F_{\mu-1}(n)$ dargestellt, wie anfangs in Aussicht gestellt worden ist.

Die hiernach mögliche successive Berechnung der Koëffizienten von $F_\mu(n)$ vereinfacht sich für einen gegebenen Wert von μ, wenn man beachtet, dass die Faktoren der höchsten Potenzen von n rationale Zahlen sind, und dass man das spätere Vorkommen der Divisionsreste aus der Entwicklung von $F_\mu(n)$ in die $\underset{\mu=f\xi+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ ablesen kann. Wollen wir als Beispiel $F_6(n)$ aus dem in 23.) und 24.) dargestellten $F_5(n)$ ableiten, so betrachten wir in der Entwicklung von $F_6(n)$ diejenigen $\underset{\mu=6=f\xi+g\eta+\ldots}{\varphi(n)}$ welche sich nach 11.)a reduzieren lassen.

Unter diesen ist:

$$\underset{\mu=3\,.\,2}{\varphi}(n) = \underset{\mu=3\,.\,1}{\varphi}\left(\frac{n}{2}\right)\frac{-\Re\left(\frac{n}{2}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{2}\right)+1}{2}$$

nach 23.)

$$= \frac{1}{2}\,\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{-\Re\left(\frac{n}{2}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{2}\right)+1}{2}$$

und:

$$\underset{\mu=2\,.\,3}{\varphi}(n) = \underset{\mu=2\,.\,1}{\varphi}\left(\frac{n}{3}\right)\frac{-\Re\left(\frac{n}{3}\right)+\Re\left(\frac{n-1}{3}\right)+1}{3}$$

$$= \left(\frac{n}{3}+1\right)\frac{-\Re\left(\frac{n}{3}\right)+\Re\left(\frac{u-1}{3}\right)+1}{3}$$

Es sind also in $F_6(n)$ die Faktoren von n^5, n^4, n^3 rationale Zahlen, n^2 ist mit Divisionsresten von n mit dem Nenner 2 und n mit Divisionsresten mit den Nennern 2 und 3 multipliziert. Allgemein ist, wie leicht ersichtlich, n^h mit Divisionsresten vom Nenner λ multipliziert oder nicht, je nachdem $h+1 \geqq \left|\frac{\mu}{\lambda}\right|$ oder $h+1 < \left|\frac{\mu}{\lambda}\right|$ ist.

Wir können nun aus 23.) folgende Gleichung für $F_5(n)$ ableiten:

$$5!\,4!\,F_5(n) = n^4 + 30\,n^3 + 310\,n^2 + \left(1320 - 90\,\Re\left(\frac{n}{2}\right)\right)n - 495\,\Re\left(\frac{n}{2}\right)$$
$$-\frac{320}{3}\left(2\,\Re\left(\frac{n}{3}\right)+\Re\left(\frac{n+1}{3}\right)-1\right) - 180\,\Re\left(\frac{n}{4}\right)+5!\,4! - \frac{(4!)^2}{5}\left(\Re\left(\frac{n}{5}\right)-\Re\left(\frac{n-1}{5}\right)+4\right);$$

hierin ist: $-180\,\Re\left(\frac{n}{4}\right) = -90\,\Re\left(\frac{n}{4}\right)+90\,\Re\left(\frac{n-6}{4}\right)-180\,\Re\left(\frac{n}{2}\right)-180$

Aus dem bisherigen folgt dann, dass wir $\mathfrak{F}_6(n)$ in der Form darstellen können: 46.)

$$\mathfrak{F}_6(n) = a_1\,n^5 + a_2\,n^4 + a_3\,n^3 + \left(a_4 + a_5\,\Re\left(\frac{n}{2}\right)\right)n^2 + \left(a_6 + a_7\,\Re\left(\frac{n}{2}\right) + a_8\,\Re\left(\frac{n}{3}\right) + a_9\,\Re\left(\frac{n+1}{3}\right)\right)n$$
$$+ a_{10}\,\Re\left(\frac{n}{4}\right) + a_{11}\,\Re\left(\frac{n}{5}\right)$$

Nach 26.)a ist: $$\mathfrak{F}_6(n) - \mathfrak{F}_6(n-6) = F_5(n) \qquad 47.)$$

In dieser Gleichung setzen wir auf beiden Seiten die Koëffizienten gleicher Potenzen von n und gleicher Divisionsreste von n einander gleich, so ist der Koëffizient:

von n^4: $6\,.\,5\,a_1 = \frac{1}{5!\,4!}$ 48.)

„ n^3: $-6^2\binom{5}{2}a_1 + 6\,.\,4\,a_2 = \frac{30}{5!\,4!}$

„ n^2: $+6_2\binom{5}{3}a_1 - 6^2\binom{4}{2}a_2 + 6\,.\,3\,a_3 = \frac{310}{5!\,4!}$

„ n^1: $-6^4\binom{5}{4}a_1 + 6^3\binom{4}{3}a_2 - 6^2\binom{3}{2}a_3 + 6\,.\,2\,a_4 = \frac{1320}{5!\,4!}$

„ n^0: $+6^5\binom{5}{5}a_1 - 6^4\binom{4}{4}a_2 + 6^3\binom{3}{3}a_3 - 6^2\binom{2}{2}a_4 + 6\,.\,1\,a_6 = \frac{70376}{6!\,5!}$

$$\text{von } n\,\Re\left(\frac{n}{2}\right): \quad 6\,.\,2\,a_5 = -\frac{90}{5!\;4!}$$

$$\text{„ } \Re\left(\frac{n}{5}\right): \quad a_{11} = -\frac{576}{5\,.\,5!\;4!}$$

$$\text{„ } \Re\left(\frac{n}{4}\right): \quad a_{10} = -\frac{90}{5!\;4!}$$

$$\text{„ } \Re\left(\frac{n}{3}\right): \quad 6\,a_8 = -\frac{640}{3\,.\,5!\;4!}$$

$$\text{„ } \Re\left(\frac{n+1}{3}\right): \quad 6\,a_9 = -\frac{320}{3\,.\,5!\;4!}$$

$$\text{„ } \Re\left(\frac{n}{2}\right): \quad 6\,a_7 = -\frac{675}{5!\;4!}$$

Hieraus findet mau die a und mithin $\mathfrak{F}_6(n)$.

In dem nach 28.) berechneten $F_6(n)$:

$$F_6(n) = \mathfrak{F}_6(n) - \mathfrak{F}_6\left[\Re\left(\frac{n}{6}\right)\right] + F_5\left[\Re\left(\frac{n}{6}\right)\right]$$

$$= \mathfrak{F}_6(n) - \mathfrak{F}_6\left[\Re\left(\frac{n}{6}\right) - 6\right] \text{ nach 42.)}$$

ergiebt sich wieder, dass die um 1 verminderte Summe der vom Faktor n freien Glieder $\leqq 0$ nnd > -1 ist. Also ist 49.)

$$F_6(n) = \left|\frac{n^5 + \frac{105}{2}n^4 + \frac{3080}{3}n^3 + \left(9300 - 225\,\Re\left(\frac{n}{2}\right)\right)n^2 + n\left(\frac{121840}{3} - 3375\,\Re\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{3200}{3}\,\Re\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1600}{3}\Re\left(\frac{n+1}{3}\right)\right)}{6!\;5!}\right| + 1$$

oder endlich: 50.)

$$F_6(n) = \left|\frac{n^5 + \frac{105}{2}n^4 + \frac{2405}{3}n^3 + 4325n^2 + 40080n + 450\,n^2\left|\frac{n}{2}\right| + 6750\,n\left|\frac{n}{2}\right| + 3200\,n\left|\frac{n}{3}\right| + 1600\,n\left|\frac{n+1}{3}\right|}{6!\;5!}\right| + 1$$

Vita.

Natus sum Johannes Wolff anno MDCCCLXX die XVII mensis Martis in oppido, cui nomen est „Magdeburg“, patre Ludovico Wolff, matre Aemilia e gente Birnbaum. Fidem confiteor evangelicam. Anno MDCCCLXXVIII in gymnasium quod dicitur Coloniense Berolini receptus sum. Quod cum per novem annos frequentassem, testimonium maturitatis vere anni MDCCCLXXXVII assecutus sum. Deinde in universitatibus Tubingae et Berolini studiis me dedi mathematicis, physicis, philosophicis.

Praeceptores mihi fuerunt viri doctissimi:

Tubingae:

v. Sigwart, Brill, Franz Meyer.

Berolini:

Zeller, Netto, v. Helmholtz, du Bois-Reymond, Knoblauch, Fuchs, Kronecker, Kundt, Paulsen, Rammelsberg, Hensel, Aron, Glan, Weinstein, Schlesinger, Ebbinghaus, Dilthey, König, Gizycki.

Quibus omnibus viris, praecipure viro doctissimo Kronecker, maximas gratias ago.

Thesen.

I.

Die auf den Schulen vorgetragene Parallelentheorie darf nicht in Widerspruch mit den Resultaten der Wissenschaft stehen.

II.

Die gerade Linie wird am besten definiert als eine Linie, welche ihre Lage nicht verändern kann, wenn man zwei ihrer Punkte festhält.

III.

Der Wert einer mathematischen Theorie ist unabhängig von ihrer praktischen Verwendbarkeit.